

**Вопросы и задачи для квалификационных работ
по термодинамике и статистической физике
и по спецкурсу "Дополнительные главы термодинамики"/"Модели
физической кинетики"**

**КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА 1
ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МИНИМУМ (ПОВТОРЕНИЕ)**

- 0.1. Основное термодинамическое тождество для закрытых и открытых систем. Химический потенциал.
- 0.2. Энтальпия H , энергия Гельмгольца F (функция Гельмгольца, свободная энергия), энергия Гиббса G (потенциал Гиббса), потенциал открытой системы; их дифференциалы. Характеристические функции.
- 0.3. Связь энергии Гиббса и химического потенциала.
- 0.4. Теплоемкость равновесного процесса. Изохорная и изобарная теплоемкости.
- 0.5. Свойства энтропии изолированной системы.
- 0.6. Условие устойчивого равновесия системы в термостате.
- 0.7. Условие устойчивого равновесия системы под поршнем в термостате.
- 0.8. Условие устойчивого равновесия системы, выделенной из термостата воображаемыми стенками.
- 0.9. Термодинамические неравенства.
- 0.10. Распределения Максвелла и Максвелла-Больцмана.
- 0.11. Квантовое распределение Больцмана ("каноническое распределение Гиббса") для системы в термостате.
- 0.12. Большое каноническое распределение Гиббса для системы, выделенной из термостата воображаемыми стенками.
- 0.13. Среднее значение физической величины по заданному распределению. Дисперсии и корреляции физических величин.
- 0.14. Гипотеза Больцмана для энтропии.
- 0.15. Формулы Гиббса для энергии Гельмгольца и потенциала открытой системы.
- 0.16. Гипотеза Планка о квантовании фазового пространства.
- 0.17. Расчет сумм $\sum_n f(\epsilon_n)$ по уровням энергии квантовой системы с помощью гипотезы Планка. Квазиклассическая формула для статистической суммы. Расчет большой статистической суммы.
- 0.18. Распределение осцилляторов в твердом теле по частотам в моделях Эйнштейна и Дебая.
- 0.19. Идеальные квантовые системы. Свойства состояний с определенными числами заполнения. Большое каноническое распределение.
- 0.20. Средние числа заполнения для идеальной квантовой системы, выделенной из термостата воображаемыми стенками.
- 0.21. Корреляционные функции Боголюбова в равновесной и неравновесной статистической физике.
- 0.22. Равновесные корреляционные функции Боголюбова F_1 и F_2 для однородных систем с короткодействием.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МИНИМУМ

(возможные ответы на вопросы)

1. Основное термодинамическое тождество для закрытых и открытых систем. Химический потенциал.

Для закрытых систем $dS = \frac{1}{T}[dU + PdV]$; Для открытых систем $dS = \frac{1}{T}[dU + PdV - \mu dN] = \frac{1}{T}[dU + PdV - \mu^m dv]$, μ — химический потенциал в расчете на одну частицу, μ^m — молярный химический потенциал.

2. Энтальпия H , энергия Гельмгольца F (функция Гельмгольца, свободная энергия), энергия Гиббса G (потенциал Гиббса), потенциал открытой системы; их дифференциалы. Характеристические функции.

Энтальпия $H = U + PV$, энергия Гельмгольца $F = U - TS$, энергия Гиббса $G = U - TS + PV$, потенциал открытой системы $K = U - TS - \mu^m \nu$. Формулы для дифференциалов: $dH = TdS + VdP + \mu^m dv$, $dF = -SdT - PdV + \mu^m dv$, $dG = -SdT + VdP + \mu^m dv$, $dK = -SdT - PdV - \nu d\mu^m$. Функция $A(a_1, a_2, \dots)$ называется характеристической, если она полностью определяет все термодинамические свойства вещества. Каждая из функций $S(U, V, \nu)$, $U(S, V, \nu)$, $S(H, P, \nu)$, $H(S, P, \nu)$, $F(T, V, \nu)$, $G(T, P, \nu)$, $K(T, V, \mu^m)$ является характеристической: все остальные термодинамические характеристики системы через нее выражаются.

3. Связь энергии Гиббса и химического потенциала.

$$G = \mu N = \mu^m \nu.$$

4. Теплоемкость равновесного процесса. Изохорная и изобарная теплоемкости.

Теплоемкость равновесного процесса — отношение полученного системой количества теплоты к изменению температуры для изменения температуры, стремящегося к нулю. Поскольку полученное количество теплоты равно TdS , можно записать $C = T \frac{dS}{dT}$. Для частных случаев справедливы и другие соотношения: в изобарном процессе количество теплоты равно ΔH , в изохорном ΔU ; следовательно, $C_p = \frac{\partial H(T, P, \nu)}{\partial T}$; $C_v = \frac{\partial U(T, V, \nu)}{\partial T}$.

5. Свойства энтропии изолированной системы.

Энтропия изолированной системы остается постоянной в обратимых процессах, возрастает в необратимых и стремится к максимуму в состоянии устойчивого равновесия.

6. Условие устойчивого равновесия системы в термостате.

В общем случае система, обменивающаяся теплом с термостатом температуры T_0 , приходит в состояние устойчивого равновесия при $E - T_0 S \rightarrow \min$ (E — энергия, S — энтропия системы). Если может изменяться только внутренняя энергия системы, принцип запишется как $U - T_0 S \rightarrow \min$.

7. Условие устойчивого равновесия системы под поршнем в термостате.

Поскольку потенциальная энергия стоящего на поршне груза равна $P_0 V$, принцип минимума запишется как $U + P_0 V - T_0 S \rightarrow \min$.

8. Условие устойчивого равновесия системы, выделенной из термостата воображаемыми стенками.

$$U - T_0 S - \mu_0 N \rightarrow \min.$$

9. Термодинамические неравенства.

$$C_{V_m} > 0, \frac{\partial P(T, V_m)}{\partial V_m} < 0. \text{ Последнее неравенство можно также записать как } C_{P_m} > C_{V_m}.$$

10. Распределения Максвелла и Максвелла-Больцмана.

Распределение молекул по скоростям: $w_v \sim \exp\left(-\frac{m\mathbf{v}^2}{2kT}\right)$; распределение Максвелла-Больцмана для системы с гамильтонианом $H(p, q)$: $w \sim \exp\left(-\frac{H(p, q)}{kT}\right)$.

11. Квантовое распределение Больцмана ("каноническое распределение Гиббса").

Пусть квантовая система обменивается теплом с термостатом температуры T_0 . Вероятность обнаружить данную систему на уровне n (со значением энергии ε_n) пропорциональна $e^{-\varepsilon_n/kT_0}$.

12. Большое каноническое распределение Гиббса.

Пусть система частиц выделена из термостата (температура T_0 , химический потенциал μ_0) воображаемыми стенками. Вероятность обнаружить в системе N частиц в квантовом состоянии n (с энергией $E_n(N)$) пропорциональна

$$w_{Nn} \sim e^{-\frac{E_{Nn} - \mu_0 N}{kT}}.$$

13. Среднее значение физической величины по заданному распределению. Дисперсии и корреляции физических величин.

Для непрерывного случая: если $w(p, q)$ — распределение вероятности по координатам и импульсам, то среднее значение физической величины A по данному распределению равно $\langle A \rangle = \int dpdq A(p, q) w(p, q)$. Для дискретного случая: если w_n — вероятность обнаружить систему в n -м состоянии, то $\langle A \rangle = \sum_n A_n w_n$. Дисперсия $\langle (\Delta A)^2 \rangle \equiv \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$; корреляция Дисперсия $\langle \Delta A \Delta B \rangle \equiv \langle (A - \langle A \rangle)(B - \langle B \rangle) \rangle = \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle$.

14. Гипотеза Больцмана для энтропии.

$S \simeq k \ln \Gamma$, Γ — статистический вес (число возможных микроскопических состояний, реализующих данное макроскопическое состояние).

15. **Формулы Гиббса для энергии Гельмгольца и потенциала открытой системы.**

$F \simeq -kT \ln Z$, $K = -PV \simeq -kT \ln \Xi$, $Z = \sum_n e^{-E_n/kT}$ — статистическая сумма, $\Xi = \sum_{N_n} e^{-\frac{E_{N_n} - \mu N}{kT}}$ — большая статистическая сумма.

16. **Гипотеза Планка о квантовании фазового пространства.**

Число уровней энергии квантовой системы $\Gamma(E_1, E_2)$ в интервале от E_1 до E_2 пропорционально объему фазового пространства $\Omega(E_1, E_2)$, заключенного между поверхностями $H(p, q) = E_1$, $H(p, q) = E_2$. Коэффициент пропорциональности можно определить, рассмотрев какой-либо точно решаемый пример (например, одномерный гармонический осциллятор). В одномерном случае $\Gamma = \frac{1}{2\pi\hbar} \Omega$, в n -мерном без тождественных частиц $\Gamma = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \Omega$, при наличии N тождественных частиц Γ делится на $N!$, при наличии γ проекций спина у одной частицы Γ умножается на γ^N .

17. **Расчет сумм $\sum_n f(\varepsilon_n)$ по уровням энергии квантовой системы с помощью гипотезы Планка. Квазиклассическая формула для статистической суммы. Расчет большой статистической суммы.**

$\sum_n f(\varepsilon_n) \simeq \int \frac{dpdq}{(2\pi\hbar)^n} f(H(p, q))$; при наличии N тождественных частиц результат делится на $N!$, при наличии спиновых степеней свободы — умножается на γ^N . В частности, статистическая сумма при отсутствии тождественных частиц и спина $\sum_n e^{-\varepsilon_n/kT} \simeq \int \frac{dpdq}{(2\pi\hbar)^n} e^{-H(p, q)/kT}$. Большая статистическая сумма (с учетом тождественности и спина) равна

$$\Xi = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\gamma^N e^{\mu N/kT}}{(2\pi\hbar)^{nN} N!} \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{p}_N d\mathbf{r}_N e^{-H_N/kT}.$$

Здесь n — размерность пространства, в котором движется одна частица.

18. **Распределение осцилляторов в твердом теле по частотам в моделях Эйнштейна и Дебая.**

В модели Эйнштейна все $3N$ осцилляторов колеблются с одной частотой. В модели Дебая $g_{\mathbf{r}\omega} \sim \omega^2$ при $\omega < \omega_D$ и $g_{\mathbf{r}\omega} = 0$ при $\omega > \omega_D$.

19. **Идеальные квантовые системы. Свойства состояний с определенными числами заполнения. Большое каноническое распределение.**

Частицы идеальной квантовой системы друг с другом не взаимодействуют. Для таких систем можно указать состояния $|n_1 n_2 \dots\rangle$, удовлетворяющие свойствам $\hat{N}|n_1 n_2 \dots\rangle = (\varepsilon_1 n_1 + \varepsilon_2 n_2 + \dots)|n_1 n_2 \dots\rangle$ и $\hat{N}|n_1 n_2 \dots\rangle = (n_1 + n_2 + \dots)|n_1 n_2 \dots\rangle$. Числа заполнения n_1, n_2, \dots пробегает значения от 0 до 1 для фермионов и от 0 до бесконечности для бозонов. Согласно большому каноническому распределению, вероятность обнаружить систему в состоянии с числами заполнения n_1, n_2, \dots равна

$$w_{n_1 n_2 \dots} \sim e^{-\frac{(\varepsilon_1 n_1 + \varepsilon_2 n_2 + \dots) - \mu(n_1 + n_2 + \dots)}{kT}} = e^{-\frac{\varepsilon_1 - \mu}{kT} n_1} e^{-\frac{\varepsilon_2 - \mu}{kT} n_2} \dots$$

Различные числа заполнения флуктуируют независимо друг от друга.

20. **Средние числа заполнения для идеальной квантовой системы, выделенной из термостата воображаемыми стенками.**

$$\langle n_p \rangle = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_p - \mu}{kT}} \pm 1}$$

21. **Корреляционные функции Боголюбова в равновесной и неравновесной статистической физике.**

Пусть $w_N(\mathbf{p}_1, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_N, \mathbf{r}_N)$ — распределение $N \sim 10^{23}$ частиц по координатам и импульсам. Вместо функций от 10^{23} аргументов, удобнее работать с функциями конечного их числа — корреляционными функциями Боголюбова:

$$F_s(\mathbf{p}_1, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_s, \mathbf{r}_s) = V^s \int d\mathbf{p}_{s+1} d\mathbf{r}_{s+1} \dots d\mathbf{p}_N d\mathbf{r}_N w_N.$$

В равновесном случае распределение по импульсам является максвелловским:

$$F_s(\mathbf{p}_1, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{p}_s, \mathbf{r}_s) = F_s\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s\} w(\mathbf{p}_1) \dots w(\mathbf{p}_s),$$

поэтому исследуют корреляционные функции Боголюбова, зависящие только от координат.

22. **Равновесные корреляционные функции Боголюбова F_1 и F_2 для однородных систем с короткодействием.**

$F_1 = 1$, $F_2\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\} = e^{-\frac{\phi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{kT}}$ (ϕ — потенциал взаимодействия молекул друг с другом).

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА 2 БАЗОВЫЕ ЗАДАЧИ (ПОВТОРЕНИЕ)

- 0.23. Используя свойство экстенсивности, получите из основного уравнения равновесной термодинамики для систем с постоянным количеством вещества $TdS = dU + PdV$ ($\nu = \text{const}$) основное уравнение равновесной термодинамики для систем с переменным количеством вещества $TdS = dU + PdV - \mu^m d\nu$. Выразите молярный химический потенциал μ^m через другие термодинамические величины.
- 0.24. Получите из принципа максимума энтропии принцип минимума функции $E - T_0S$ для системы, обменивающейся теплом с термостатом температуры T_0 (E и S — энергия и энтропия системы). Получите из этого принципа условие термодинамической устойчивости $C_{V_m} > 0$.
- 0.25. Получите из принципа максимума энтропии принцип минимума функции $U + P_0V - T_0S$ для системы под поршнем (внешнее давление P_0) в термостате температуры T_0 (U , V и S — внутренняя энергия, объем и энтропия системы). Получите из этого принципа условие термодинамической устойчивости $\frac{\partial P(T, V_m)}{\partial V_m} < 0$.
- 0.26. Покажите, что состояние устойчивого равновесия системы, выделенной из термостата (температура T_0 , молярный химический потенциал μ_0^m) воображаемыми стенками, определяется из принципа минимума $U - T_0S - \mu_0^m\nu \rightarrow \min$ (U , S и ν — внутренняя энергия, энтропия и количество вещества системы).
- 0.27. Рассчитайте среднюю кинетическую энергию частицы максвелловского газа при температуре T .
- 0.28. Рассчитайте среднюю кинетическую и среднюю потенциальную энергию классического гармонического осциллятора при температуре T .
- 0.29. В 1819 г. Дюлонг и Пти установили, что молярные теплоемкости кристаллов при комнатной температуре с хорошей точностью совпадают. Объясните это явление.
- 0.30. Рассчитайте среднюю кинетическую и среднюю потенциальную энергию квантового гармонического осциллятора при температуре T .
- 0.31. Рассчитайте статистическую сумму, энергию Гельмгольца и внутреннюю энергию твердого тела в модели Эйнштейна.
- 0.32. Рассчитайте статистическую сумму, энергию Гельмгольца и внутреннюю энергию для системы осцилляторов, распределенных по частотам с функцией распределения $g_{r\omega}$ (число осцилляторов в интервале частот $d\omega$ равно $Vg_{r\omega}d\omega$).
- 0.33. Рассчитайте статистическую сумму и энергию Гельмгольца идеального одноатомного классического газа из N частиц в объеме V при температуре T . Найдите зависимости U , S и P от T, V, N .
- 0.34. Используя квантовое распределение Больцмана ("каноническое распределение Гиббса"), рассчитайте молярные внутреннюю энергию и изохорную теплоемкость газа из двухуровневых систем. У каждой молекулы имеется g_0 уровней энергии ϵ_0 и g_1 уровень энергии ϵ_1 .
- 0.35. Рассчитайте большую статистическую сумму классического идеального газа и найдите зависимость $P(T, \mu)$. Выразите отсюда $S(T, V, N)$ и $U(T, V, N)$.
- 0.36. Рассчитайте большую статистическую сумму классического идеального газа и найдите зависимость $P(T, \mu)$. При каком условии квантовый газ можно приближенно считать классическим?
- 0.37. Рассчитайте большую статистическую сумму идеального квантового газа и найдите зависимость $P(T, \mu)$. Получите из этой формулы соотношения для $N(T, V, \mu)$ и $U(T, V, \mu)$.
- 0.38. Рассчитайте большую статистическую сумму идеального квантового газа и найдите зависимость $P(T, \mu)$. Получите из этой формулы, что для нерелятивистского случая $PV = \frac{2}{3}U$, а в ультрарелятивистском случае $PV = \frac{1}{3}U$.
- 0.39. Рассчитайте средние числа заполнения для идеальных квантовых газов по большому каноническому распределению Гиббса. Получите отсюда формулы для распределений Бозе-Эйнштейна и Ферми для частиц идеального квантового газа по скоростям, а также формулы для $N(T, V, \mu)$ и $U(T, V, \mu)$.
- 0.40. Получите формулу Планка для распределения объемной плотности энергии равновесного излучения по частотам $U_{r\omega}$ ($VU_{r\omega}d\omega$ — энергия излучения в объеме V в интервале частот $d\omega$).
- 0.41. Статистическая система с жесткими стенками находится в термостате при температуре T_0 . Рассчитайте $\langle(\Delta E)^2\rangle_{VN}$ методом дифференцирования по параметру. Статистическая сумма (статистический интеграл) задана.
- 0.42. Статистическая система с жесткими стенками находится в термостате при температуре T_0 . Получите формулу для распределения вероятности для энергии системы в гауссовском приближении. Рассчитайте $\langle(\Delta E)^2\rangle_{VN}$. Зависимость $S(E, V, N)$ задана.

0.43. Выразите среднее число частиц в объеме V_1 , средний импульс в объеме V_1 , среднюю кинетическую энергию частиц в объеме V_1 , среднюю потенциальную энергию взаимодействия частиц с внешним полем через корреляционную функцию Боголюбова F_1 .

0.44. Выразите через парную корреляционную функцию Боголюбова F_2 среднюю потенциальную энергию взаимодействия частиц друг с другом.

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА 3 ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МИНИМУМ

- 0.45. Постановка задач неравновесной термодинамики. Свойство неубывания энтропии.
- 0.46. Уравнение теплопроводности Фурье; вид энтропии.
- 0.47. Диффузия по Фику. Уравнение, вид энтропии.
- 0.48. Броуновское движение по Эйнштейну. Уравнение, вид энтропии.
- 0.49. Закон действующих масс и кинетическое уравнение для системы атомов, переходящих с одного уровня на другой ($X_i \rightleftharpoons X_j$), и для систем с химическими реакциями первого порядка. Принцип детального равновесия. Вид энтропии.
- 0.50. Закон действующих масс и кинетическое уравнение для системы с химическими реакциями второго порядка $X_i + X_j \rightleftharpoons X_k + X_l$.
- 0.51. Модель Лоренца для легкой компоненты: кинетическое уравнение, интеграл столкновений, детальное равновесие, вид энтропии, равновесное распределение.
- 0.52. Модель Больцмана для газа со столкновениями частиц друг с другом: интеграл столкновений, детальное равновесие, вид энтропии, равновесное распределение.
- 0.53. Модель Фоккера-Планка для тяжелой компоненты: "интеграл столкновений", вид энтропии, равновесное распределение.
- 0.54. Кинетическое уравнение для пространственно неоднородной системы без столкновений. Концепция самосогласованного поля Власова.
- 0.55. Кинетическое уравнение для пространственно неоднородной системы со столкновениями; основные применения; общая схема приближенного решения.
- 0.56. Коэффициенты вязкости и теплопроводности разреженных газов (определение, общая схема расчета из уравнения Больцмана).
- 0.57. Конечновременные распределения вероятности и характеристический функционал для случайного процесса. Средние значения.
- 0.58. Гауссовский случайный процесс (различные определения).
- 0.59. Стационарный случайный процесс (различные определения, их эквивалентность).
- 0.60. Марковский случайный процесс; примеры из теории броуновского движения. Уравнение Смолуховского.
- 0.61. Уравнение Ланжевена для движения броуновской частицы. Свойства случайной силы.
- 0.62. Тепловые шумы в электрических цепях по Найквисту.
- 0.63. Корреляционная функция для скорости броуновской частицы. Теорема Дуба о корреляционной функции стационарного гауссовского марковского случайного процесса.
- 0.64. Диффузионное приближение в теории броуновского движения.
- 0.65. Запись уравнения Фоккера-Планка по стохастическому дифференциальному уравнению.
- 0.66. Разложение случайного процесса и корреляционных функций в интеграл Фурье. Спектральная плотность случайного процесса.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МИНИМУМ

(возможные ответы на вопросы)

45. Постановка задач неравновесной термодинамики. Свойство неубывания энтропии.

В неравновесной термодинамике параметры состояния системы зависят от времени; их эволюция описывается уравнениями. Как правило, неравновесные системы характеризуются бесконечным числом степеней свободы (температура и концентрация частиц зависят не только от времени, но и от координат), поэтому эволюционные уравнения неравновесной термодинамики являются уравнениями в частных производных. Общим для всех эволюционных уравнений неравновесной термодинамики является свойство неубывания энтропии: пока система приходит в равновесное состояние, энтропия возрастает; по достижении равновесия энтропия принимает свое максимальное значение.

46. Уравнение теплопроводности Фурье; вид энтропии.

Согласно закону теплопроводности Фурье (1822), плотность потока тепла (плотность потока внутренней энергии в современных представлениях) пропорциональна градиенту температуры: $\mathbf{J}_U = -\kappa \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}}$, где постоянная κ называется коэффициентом теплопроводности. Если обозначить через C_r изохорную теплоемкость единицы объема твердого тела, то уравнение Фурье запишется следующим образом:

$$C_r \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} \right).$$

Если ввести неравновесную энтропию как интеграл от объемной плотности энтропии по объему $S = \int d\mathbf{r} S_r(U_r, N_r)$, то свойство ее неубывания запишется как $\frac{dS}{dt} \geq 0$.

47. Диффузия по Фику. Уравнение, вид энтропии.

Исследуя процесс диффузии в разбавленных растворах, Фик (1855) распространил на это явление идеи Фурье, предположив, что плотность потока частиц растворенного вещества \mathbf{J}_N пропорциональна градиенту концентрации: $\mathbf{J}_N = -D \frac{\partial N_r}{\partial \mathbf{r}}$. Уравнение диффузии записывается как уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial N_r}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(D \frac{\partial N_r}{\partial \mathbf{r}} \right).$$

Энтропия разбавленного раствора зависит от концентрации растворенного вещества следующим образом:

$$S = \text{const} - k \int d\mathbf{r} N_r \ln(A N_r);$$

свойство неубывания энтропии записывается как $\frac{dS}{dt} \geq 0$.

48. Броуновское движение по Эйнштейну. Уравнение, вид энтропии.

Эйнштейн (1905) обобщил идеи Фика на диффузию броуновских частиц во внешнем поле $u(\mathbf{r})$. Он предположил, что плотность потока броуновских частиц складывается из двух слагаемых, одно из которых связано с диффузией ($\mathbf{J}_N^{\text{диф}} = -D \frac{\partial N_r}{\partial \mathbf{r}}$), а другое — с упорядоченным движением в поле внешней силы $-\frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}}$ со скоростью $-\frac{1}{\gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}}$ (γ — коэффициент вязкого трения); отсюда $\mathbf{J}_N^{\text{упор}} = N_r \mathbf{v}_{\text{упор}} = -N_r \frac{1}{\gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}}$. Уравнение Эйнштейна для раствора броуновских частиц имеет вид:

$$\frac{\partial N_r}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(D \frac{\partial N_r}{\partial \mathbf{r}} + \frac{1}{\gamma} N_r \frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}} \right).$$

При движении броуновских частиц в потенциальном поле их энергия передается окружающей среде, изменение энтропии которой равно взятому с обратным знаком изменению отношения потенциальной энергии броуновских частиц к температуре $\frac{1}{T_0} \int d\mathbf{r} N_r u(\mathbf{r})$; отсюда

$$S = \text{const} - k \int d\mathbf{r} N_r \ln(A N_r) - \frac{1}{T_0} \int d\mathbf{r} N_r u(\mathbf{r}).$$

Свойство неубывания энтропии записывается как $\frac{dS}{dt} \geq 0$.

49. Закон действующих масс и кинетическое уравнение для системы атомов, переходящих с одного уровня на другой ($X_i \rightleftharpoons X_j$), и для систем с химическими реакциями первого порядка. Принцип детального равновесия. Вид энтропии.

Согласно закону действующих масс, скорость химической реакции $X_i \rightarrow X_j$ пропорциональна числу частиц N_i вещества X_i ; коэффициент пропорциональности $W_{i \rightarrow j}$ называется константой скорости реакции. Для системы атомов, переходящих с одного уровня на другой, эта константа скорости $W_{i \rightarrow j}$ имеет смысл вероятности перехода за единицу времени. Кинетическое уравнение для числа частиц N_i :

$$\frac{dN_i}{dt} = \sum_{j \neq i} (N_j W_{j \rightarrow i} - N_i W_{i \rightarrow j}).$$

Принцип детального равновесия заключается в том, что в равновесии (равновесное число частиц N_i^0) число переходов $i \rightarrow j$ равно числу переходов $j \rightarrow i$: $N_j^0 W_{j \rightarrow i} = N_i^0 W_{i \rightarrow j}$. Если считать, что система поддерживается при постоянной температуре, а ε_i — уровни энергии, то при переходе с уровня i на j энергия передается окружающей среде, изменяя ее энтропию на $T_0^{-1}(\varepsilon_i - \varepsilon_j)$; следовательно,

$$S = \text{const} - k \sum_i N_i \ln N_i - \frac{1}{T_0} \sum_i N_i \varepsilon_i = \text{const} - k \sum_i N_i \ln \left(\frac{N_i}{N_i^0} \right);$$

здесь учтено каноническое распределение Гиббса для равновесной системы $N_i^0 \sim e^{-\varepsilon_i/kT}$.

50. Закон действующих масс и кинетическое уравнение для системы с химическими реакциями второго порядка $X_i + X_j \rightleftharpoons X_k + X_l$.

Согласно закону действующих масс, скорость химической реакции второго порядка пропорциональна произведению концентраций реагирующих веществ; отсюда записывается кинетическое уравнение:

$$\frac{dN_i}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{jkl} (N_k N_l W_{kl \rightarrow ij} - N_i N_j W_{ij \rightarrow kl}).$$

51. Модель Лоренца для легкой компоненты: кинетическое уравнение, интеграл столкновений, детальное равновесие, вид энтропии, равновесное распределение.

Для описания электронного газа в металле Лоренц предложил модель, в которой электроны движутся как свободные частицы, лишь изредка рассеиваясь на неподвижных неоднородностях. В такой концепции электроны, имеющие скорость \mathbf{v} , могут рассматриваться как частицы газа $X_{\mathbf{v}}$, а процесс столкновения, в результате которого электрон изменяет свою скорость с \mathbf{v} на \mathbf{v}' — как химическую реакцию $X_{\mathbf{v}} \rightarrow X_{\mathbf{v}'}$. По аналогии с законом действующих масс запишем кинетическое уравнение:

$$\frac{\partial N_{\mathbf{rv}}(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = \int d\mathbf{v}' N_{\mathbf{rv}}(\mathbf{v}', t) W_{\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}} - \int d\mathbf{v}' N_{\mathbf{rv}}(\mathbf{v}, t) W_{\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}'},$$

правая часть которого называется интегралом столкновений $I_c[N_{\mathbf{v}}]$ и выражает изменение числа частиц с данной скоростью за счет процессов столкновений. Принцип детального равновесия выражается в виде соотношения $W_{\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}'} = W_{\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}}$ и вытекает из соображений симметрии. Энтропия системы записывается как

$$S = -kV \int d\mathbf{v} N_{\mathbf{rv}} \ln(AN_{\mathbf{rv}}), \quad A = \text{const.}$$

В модели Лоренца устанавливается равновесие только по направлениям движения частиц: равновесным является произвольное распределение частиц по скоростям, которое зависит только от модуля скорости.

52. Модель Больцмана для газа со столкновениями частиц друг с другом: интеграл столкновений, детальное равновесие, вид энтропии, равновесное распределение.

В модели Больцмана предполагается, что частицы газа движутся как свободные, лишь изредка сталкиваясь друг с другом. Процесс столкновения частиц, в результате которого частицы со скоростями \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 приобретают скорости \mathbf{v}'_1 и \mathbf{v}'_2 , можно рассматривать по аналогии с химической реакцией второго порядка $X_{\mathbf{v}_1} + X_{\mathbf{v}_2} \rightarrow X_{\mathbf{v}'_1} + X_{\mathbf{v}'_2}$. Количество таких столкновений пропорционально произведению концентраций частиц со скоростями \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 . По аналогии с уравнением химической кинетики для реакций второго порядка запишем уравнение Больцмана:

$$\frac{\partial N_{\mathbf{rv}}(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = I_c[N_{\mathbf{rv}}](\mathbf{v}, t),$$

с интегралом столкновений Больцмана

$$I_c[N_{\mathbf{rv}}](\mathbf{v}) = \int d\mathbf{v}' d\mathbf{v}_2 d\mathbf{v}'_2 N_{\mathbf{rv}}(\mathbf{v}') N_{\mathbf{rv}}(\mathbf{v}'_2) W_{\mathbf{v}' \mathbf{v}'_2 \rightarrow \mathbf{v} \mathbf{v}_2} - \int d\mathbf{v}' d\mathbf{v}_2 d\mathbf{v}'_2 N_{\mathbf{rv}}(\mathbf{v}) N_{\mathbf{rv}}(\mathbf{v}_2) W_{\mathbf{v} \mathbf{v}_2 \rightarrow \mathbf{v}' \mathbf{v}'_2}.$$

Коэффициентная функция $W_{\mathbf{v} \mathbf{v}_2 \rightarrow \mathbf{v}' \mathbf{v}'_2}$ выражается через дифференциальное сечение рассеяния для процесса $\mathbf{v} \mathbf{v}_2 \rightarrow \mathbf{v}' \mathbf{v}'_2$ и удовлетворяет принципу детального равновесия: $W_{\mathbf{v}' \mathbf{v}'_2 \rightarrow \mathbf{v} \mathbf{v}_2}$. Энтропия системы записывается как

$$S = -kV \int d\mathbf{v} N_{\mathbf{rv}} \ln(AN_{\mathbf{rv}}), \quad A = \text{const}$$

и удовлетворяет свойству неубывания. Равновесие в системе достигается только при максвелловском распределении частиц по скоростям: $N_{\mathbf{rv}} = C e^{-a(\mathbf{v}-\mathbf{V})^2}$. Именно анализ кинетического уравнения и привел Больцмана к обоснованию распределения Максвелла.

53. Модель Фоккера-Планка для тяжелой компоненты: "интеграл столкновений", вид энтропии, равновесное распределение.

Предположим, что имеется газ тяжелых частиц (например, броуновских частиц) в среде с температурой T_0 . При каждом столкновении с легкой частицей среды скорость тяжелой частицы практически не меняется. В данном приближении "интеграл столкновений" приводится к виду дифференциального оператора:

$$I_c N_{\mathbf{rv}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left(\Gamma \mathbf{v} N_{\mathbf{rv}} + c \frac{\partial N_{\mathbf{rv}}}{\partial \mathbf{v}} \right)$$

с некоторыми коэффициентами Γ и c . Кинетическое уравнение с таким "интегралом столкновений" Фоккера-Планка аналогично уравнению диффузии, которое записано не в координатном пространстве, а в пространстве скоростей. При записи энтропии следует учесть также энтропию окружающей среды:

$$S = \text{const} - k \int d\mathbf{r} N_{\mathbf{r}} \ln(AN_{\mathbf{r}}) - \frac{1}{T_0} \int d\mathbf{r} N_{\mathbf{r}} u(\mathbf{r}).$$

54. *Кинетическое уравнение для пространственно неоднородной системы без столкновений. Концепция самосогласованного поля Власова.*

При отсутствии процессов столкновений частиц друг с другом для системы частиц во внешнем потенциале $u(\mathbf{r})$ можно записать уравнение непрерывности в фазовом пространстве:

$$\frac{\partial N_{\mathbf{r}\mathbf{v}}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}(N_{\mathbf{r}\mathbf{v}}\mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\left(-\frac{1}{m}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}}N_{\mathbf{r}\mathbf{v}}\right) = 0.$$

Этим уравнением можно пользоваться и для систем с дальнедействием: для этого согласно концепции самосогласованного поля Власова надо заменить внешний потенциал u на самосогласованный потенциал \tilde{u} , который складывается из внешнего потенциала u и потенциала, создаваемого другими частицами в данной точке:

$$\tilde{u}(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}' d\mathbf{v}' N_{\mathbf{r}'\mathbf{v}'} \phi(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

55. *Кинетическое уравнение для пространственно неоднородной системы со столкновениями; основные применения; общая схема приближенного решения.*

Если частицы изредка сталкиваются друг с другом, кинетическое уравнение для бесстолкновительной системы можно модифицировать, добавив интеграл столкновений в правую часть:

$$\frac{\partial N_{\mathbf{r}\mathbf{v}}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}(N_{\mathbf{r}\mathbf{v}}\mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\left(-\frac{1}{m}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}}N_{\mathbf{r}\mathbf{v}}\right) = I_c[N_{\mathbf{r}\mathbf{v}}].$$

Для приближенного решения уравнения считаем, что распределение частиц по скоростям в каждой точке почти совпадает с равновесным распределением: $N_{\mathbf{r}\mathbf{v}} = N_{\mathbf{r}\mathbf{v}}^0 + f$; отклонение f функции распределения от равновесия считаем малым.

56. *Коэффициенты вязкости и теплопроводности разреженных газов (определение, общая схема расчета из уравнения Больцмана).*

Пусть слой газа движется вдоль оси x со скоростями $V_x(z)$, зависящими от координаты z ; температура и концентрация частиц предполагаются постоянными. Тогда в системе вдоль оси z возникает поток горизонтального импульса; плотность потока пропорциональна градиенту скорости:

$$J_{p_x}^z = -\eta \frac{\partial V_x}{\partial z}.$$

Множитель η называют коэффициентом вязкости.

Далее, пусть температура газа зависит от координаты z , а давление и концентрация частиц постоянны. Тогда в системе возникает поток энергии вдоль оси z ; плотность потока энергии пропорциональна градиенту температуры:

$$J_U^z = -\varkappa \frac{\partial T}{\partial z}.$$

Множитель \varkappa называют коэффициентом теплопроводности.

Для расчета коэффициентов теплопроводности следует записать кинетическое уравнение Больцмана для неоднородного случая, воспользоваться приближением $N_{\mathbf{r}\mathbf{v}} = N_{\mathbf{r}\mathbf{v}}^0 + f$, где $N_{\mathbf{r}\mathbf{v}}^0$ — равновесное распределение (температура или гидродинамическая скорость в каждой точке свои), а f — поправка к нему. Левая часть уравнения Больцмана рассматривается в нулевом приближении, причем производной $\frac{\partial}{\partial t} N_{\mathbf{r}\mathbf{v}}^0 f$ пренебрегаем; правая часть рассматривается в линеаризованном по f приближении: $I_c[N_{\mathbf{r}\mathbf{v}}] \simeq \hat{I}_c f$. После этого определяется функция f ; рассчитывается плотность потока энергии или импульса; устанавливается его пропорциональность градиенту температуры или скорости; коэффициенты переноса выражаются через матричные элементы оператора, обратного к интегралу столкновений.

57. *Конечноремные распределения вероятности и характеристический функционал для случайного процесса. Средние значения.*

Вероятностную меру в теории случайных процессов можно задавать с помощью конечноремных распределений вероятности $w_k(\xi_1, t_1; \dots; \xi_k, t_k)$. Пусть $\xi(t)$ — случайный процесс. Тогда w_k является плотностью вероятности того, что в момент времени t_1 величина $\xi(t_1)$ равна ξ_1 , в момент t_2 — равна ξ_2 , ...

Можно рассматривать и преобразование Фурье от распределения вероятности, равное среднему значению $\chi[\alpha_1, \dots, \alpha_k] = \langle e^{i \sum_k \alpha_k \xi_k} \rangle$. Если моментов времени выбрано очень много, вместо характеристической функции $\chi_k[\alpha_1, \dots, \alpha_k]$ рассматривается характеристический функционал $\chi[\alpha(\cdot)] = \langle e^{i \int dt \alpha(t) \xi(t)} \rangle$, зависящий от функции $\alpha(t)$.

58. *Гауссовский случайный процесс (различные определения).*

Случайный процесс $\xi(t)$ с $\langle \xi(t) \rangle = 0$ называется гауссовским, если гауссовскими являются конечноремные распределения $(w_k(\xi_1, t_1; \dots; \xi_k, t_k) = A e^{-\frac{1}{2} \sum_{j,s} M_{js}(t_1, \dots, t_k) \xi_j \xi_s})$ либо характеристический функционал: $\langle e^{i \int dt \alpha(t) \xi(t)} \rangle = e^{-\frac{1}{2} \int dt' dt'' K(t', t'') \alpha(t') \alpha(t'')}$.

59. *Стационарный случайный процесс (различные определения, их эквивалентность).*

Свойство стационарности случайного процесса $\xi(t)$ записывают или в виде соотношения на k -временные распределения вероятности $w_k(\xi_1, t_1 + \tau, \dots, \xi_k, t_k + \tau) = w_k(\xi_1, t_1, \dots, \xi_k, t_k)$, или в виде свойства средних $\langle \xi(t_1 + \tau) \dots \xi(t_k + \tau) \rangle = \langle \xi(t_1) \dots \xi(t_k) \rangle$, или в виде свойства характеристического функционала $\langle e^{i \int dt \alpha(t+\tau) \xi(t)} \rangle = \langle e^{i \int dt \alpha(t) \xi(t)} \rangle$.

60. Марковский случайный процесс; примеры из теории броуновского движения. Уравнение Смолуховского.

Случайный процесс называется марковским, если при $t_1 < t_2 < \dots < t_k$

$$w_k(\xi_1, t_1; \dots; \xi_k, t_k) = w_1(\xi_1, t_1)P(\xi_1, t_1 \rightarrow \xi_2, t_2)P(\xi_2, t_2 \rightarrow \xi_3, t_3) \dots P(\xi_{k-1}, t_{k-1} \rightarrow \xi_k, t_k).$$

Величина $P(x', t' \rightarrow x'', t'')$ имеет смысл вероятности перехода из состояния x', t' в состояние x'', t'' . Физический смысл свойства марковости заключается в том, что эта вероятность перехода определяется только начальным и конечным состоянием и не зависит от предыстории. Вероятность перехода удовлетворяет уравнению Смолуховского: $P(x_1, t_1 \rightarrow x_3, t_3) = \int dx_2 P(x_1, t_1 \rightarrow x_2, t_2)P(x_2, t_2 \rightarrow x_3, t_3)$ при $t_1 < t_2 < t_3$.

В теории броуновского движения случайный процесс $(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t))$ считается марковским (по начальным координате и скорости броуновской частицы однозначно восстанавливается вероятность перехода в конечное состояние). В некоторых случаях с некоторой точностью можно считать марковскими и другие процессы. Если эволюция броуновской частицы рассматривается в шкале времени, грубой по сравнению с временем релаксации ее скорости, то начальный импульс можно не задавать: распределение броуновских частиц по скоростям почти мгновенно становится максвелловским. Поэтому случайный процесс $\mathbf{r}(t)$ в грубой шкале времени можно считать марковским. Для свободной броуновской частицы марковским является процесс $\mathbf{v}(t)$.

61. Уравнение Ланжевена для движения броуновской частицы. Свойства случайной силы.

Ланжевен (1908) предложил записать для броуновской частицы второй закон Ньютона:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}} - \gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{f}(t)$$

с учетом как силы вязкого трения, действующей на броуновскую частицу, так и дополнительной случайной силы $\mathbf{f}(t)$. Свойства случайной силы были исследованы Орнштейном (1917). Запишем их в одномерном случае: среднее значение предполагается равным нулю $\langle f(t) \rangle = 0$; корреляционная функция предполагается дельта-образной $\langle f(t_1)f(t_2) \rangle \simeq a\delta(t_1 - t_2)$, а сам процесс $f(t)$ — гауссовским.

62. Тепловые шумы в электрических цепях по Найквисту.

По Найквисту (1928), для электрических цепей с резисторами следует записывать обычные правила Кирхгофа, в которых дополнительно учитывать, что на резисторах наводится случайная ЭДС тепловых шумов $\mathcal{E}(t)$, которая является гауссовским случайным процессом с нулевым средним и дельтаобразной дисперсией.

63. Корреляционная функция для скорости броуновской частицы. Теорема Дуба о корреляционной функции стационарного гауссовского марковского случайного процесса.

Корреляционная функция для скорости свободной одномерной броуновской частицы $\langle v_x(t_1)v_x(t_2) \rangle = \langle v_x^2 \rangle e^{-\Gamma|t_1 - t_2|}$. Такую же структуру имеет и корреляционная функция произвольного стационарного гауссовского марковского случайного процесса.

64. Диффузионное приближение в теории броуновского движения.

На временах, много больших времени релаксации скорости, корреляционную функцию для скорости свободной броуновской частицы можно приближенно считать дельта-образной: $\langle \tilde{v}_x(t_1)\tilde{v}_x(t_2) \rangle \simeq b\delta(t_1 - t_2)$. Если броуновская частица движется в поле внешней силы, ее скорость складывается из скорости установившегося движения $-\frac{1}{\gamma} \frac{\partial u}{\partial x}$ и случайной составляющей:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial u}{\partial x} + \tilde{v}(t).$$

65. Запись уравнения Фоккера-Планка по стохастическому дифференциальному уравнению.

Пусть параметры состояния $X_i(t)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{dX_i(t)}{dt} = F_i(\mathbf{X}(t), t) + \varphi_i(t),$$

где F_i — внешнее детерминированное воздействие на систему, $\varphi_i(t)$ — случайное воздействие (гауссовский случайный процесс, нулевое среднее, дельта-образная корреляция $\langle \varphi_i(t_1)\varphi_j(t_2) \rangle = M_{ij}(t_1)\delta(t_1 - t_2)$). Тогда распределение вероятности $w(\mathbf{X}, t)$ для параметров состояния удовлетворяет дифференциальному уравнению Фоккера-Планка второго порядка:

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial X_i}(F_i w) + \frac{1}{2} M_{ij} \frac{\partial^2 w}{\partial X_i \partial X_j}.$$

66. Разложение случайного процесса и корреляционных функций в интеграл Фурье. Спектральная плотность случайного процесса.

При решении задач используют разложение случайного процесса и корреляционной функции в интеграл Фурье:

$$\xi(t) = \int d\omega \xi\{\omega\} e^{-i\omega t}, \langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle = \int d\omega J_\xi(\omega) e^{-i\omega(t_1 - t_2)}.$$

Функция $J_\xi(\omega)$ называется спектральной плотностью случайного процесса; она удовлетворяет свойству $J_\xi(\omega)\delta(\omega - \omega') = \langle \xi\{\omega\}\xi^*\{\omega'\} \rangle$.

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА 4 БАЗОВЫЕ ЗАДАЧИ

- 0.67. Докажите свойство неубывания энтропии для уравнения теплопроводности Фурье.
- 0.68. Докажите свойство неубывания энтропии для уравнения диффузии.
- 0.69. Рассмотрим процесс диффузии частиц на прямой. В момент времени $t = 0$ все N частиц находились в начале координат. Найдите зависимость $N_{\mathbf{r}}(x, t)$ концентрации броуновских частиц от координаты и времени. Рассчитайте средние $\langle x(t) \rangle$ и $\langle (\Delta x(t))^2 \rangle$ по распределению броуновских частиц в момент t . Коэффициент диффузии частиц равен D .
- 0.70. Докажите свойство неубывания энтропии для уравнения Эйнштейна для броуновского движения.
- 0.71. Получите соотношение Эйнштейна, связывающее коэффициент диффузии броуновских частиц D , коэффициент вязкого трения γ и температуру окружающей среды T .
- 0.72. Докажите свойство неубывания энтропии для системы независимых атомов, переходящих с одного уровня на другой.
- 0.73. Докажите свойство неубывания энтропии для модели Лоренца электронного газа в металле.
- 0.74. Покажите, что максвелловское распределение обращает в нуль интеграл столкновений Больцмана.
- 0.75. Докажите свойство неубывания энтропии (H-теорему Больцмана) для газа со столкновением частиц друг с другом.
- 0.76. Считая, что тяжелые частицы при столкновении с молекулами среды практически не меняют свою скорость, приведите интеграл столкновений Больцмана к виду "интеграла столкновений Фоккера-Планка".
- 0.77. Покажите, что максвелловское распределение обращает "интеграл столкновений Фоккера-Планка" в нуль.
- 0.78. Докажите свойство неубывания энтропии для кинетического уравнения с "интегралом столкновений Фоккера-Планка".
- 0.79. Покажите, что для гауссовской векторной случайной величины (ξ_1, \dots, ξ_k) характеристическая функция $\chi(\alpha) = \langle e^{i \sum_j \alpha_j \xi_j} \rangle$ является гауссовской.
- 0.80. В начальный момент времени свободная одномерная броуновская частица, движущаяся в среде (сила вязкого трения $-\gamma v_x$, температура T , масса m), имела скорость $v_x = v_0$. Решая уравнение Ланжевена, рассчитайте $\langle v_x(t) \rangle$, $\langle (\Delta v_x(t))^2 \rangle$. Считайте корреляционную функцию для случайной силы дельтаобразной. Выразите коэффициент при дельта-функции через параметры γ, T, m .
- 0.81. В начальный момент времени свободная одномерная броуновская частица, движущаяся в среде (сила вязкого трения $-\gamma v_x$, температура T , масса m), имела скорость $v_x = v_0$. Решая уравнение Ланжевена, рассчитайте $\langle v_x(t) \rangle$, $\langle \Delta v_x(t) \Delta v_x(t + \Delta t) \rangle$. Найдите распределение вероятности для Δv_x в момент времени t . Покажите, что с течением времени броуновская частица самопроизвольно достигает равновесного состояния, а случайный процесс $v_x(t)$ становится стационарным.
- 0.82. Рассматривается свободная одномерная броуновская частица в вязкой среде (сила вязкого трения $-\gamma v_x$, температура T , масса m), находившаяся в начальный момент времени в начале координат. Покажите, что на больших временах $\Delta t \gg m/\gamma$ корреляционную функцию для скорости броуновской частицы можно приближенно аппроксимировать дельта-образной функцией. Как на основе данного результата найти $\langle (\Delta x(t))^2 \rangle$?
- 0.83. Конденсатор, включенный в электрическую RC -цепь, в начальный момент времени имел заряд Q_0 . Сопротивление R поддерживается при температуре T . Рассчитайте $\langle Q(t) \rangle$, $\langle \Delta Q(t) \Delta Q(t + \Delta t) \rangle$, используя предположение Найквиста о том, что на резисторе наводится случайная ЭДС тепловых шумов с нулевым средним и дельта-образной корреляционной функцией. Получите формулу Найквиста для коэффициента при дельта-функции.
- 0.84. Обоснуйте формулу для обратного преобразования Фурье.
- 0.85. Обоснуйте соотношение $J_{\xi}(\omega) \delta(\omega - \omega') = \langle \xi\{\omega\} \xi^*\{\omega'\} \rangle$.
- 0.86. С помощью метода спектральных разложений для свободной броуновской частицы в вязкой среде (сила вязкого трения $-\gamma v_x$, температура T , масса m) рассчитайте $\langle v_x(t_1) v_x(t_2) \rangle$. Считайте, что случайный процесс $v_x(t)$ уже стал стационарным.
- 0.87. С помощью метода спектральных разложений для электрической RC -цепи рассчитайте $\langle Q(t_1) Q(t_2) \rangle$.
- 0.88. Обоснуйте уравнение Смолуховского.